Physikalisches Institut der Universität Breslau

# Untersuchungen über die Quanten-Energiewerte des unsymmetrischen Kreisels und des Kramers-Pauli'schen Molekülmodells

o

## Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde an der
hohen philosophischen Fakultät der Schlesischen
Friedrich-Wilhelms-Universität zu Breslau
vorgelegt von

**Eberhard Ließ**

Promotion: 19. Mai 1928

Spezial-Druckerei für Dissertationen Dr. H. Eschenhagen, Ohlau i. Schl.

Gedruckt mit Genehmigung
einer hohen philosophischen Fakultät
der Schlesischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Breslau.

Referent: Prof. Dr. F. Reiche

Examen rigorosum: 30. Juli 1927.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Für die Theorie der Bandenspektren ist es von Interesse, die Abhängigkeit der Energie von den Quantenzahlen für einen unsymmetrischen Kreisel zu kennen, der sich kräftefrei um seinen Schwerpunkt bewegt. Epstein[1], Reiche[2], G. Thomsen[3] und in neuerer Zeit Lütgemeier[4] und Witmer[5] haben über diesen Gegenstand Arbeiten angefertigt. An die Thomsen'sche Arbeit schließt sich der folgende Teil I an. In Teil II wird die gleiche Methode auf das Kramers-Paulische Molekülmodell angewendet. Die neuen Ansätze, die sich aus der Theorie von Heisenberg, Born, Jordan einerseits und von Schrödinger andrerseits ergeben, konnten hier nicht berücksichtigt werden

# I. Teil.

## § 1.

Zur Beschreibung der Bewegung des Kreisels werden 2 Koordinatensysteme benutzt mit dem gleichen Ursprung im Schwerpunkt des Kreisels, ein raumfestes (x y z) und ein körperfestes ($\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$), welches gegen das raumfeste durch die Winkel $\vartheta$, $\varphi$, $\psi$ bestimmt ist. Es sei $\vartheta$ der Winkel der $\bar{z}$-Achse gegen die raumfeste z-Achse, $\varphi$ der Winkel der $\bar{x}$-Achse gegen die Knotenlinie und $\psi$ der Winkel der Knotenlinie gegen die x-Achse. Werden die Hauptträgheitsmomente, deren Achsen in die Richtungen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ fallen sollen, mit A, B und C bezeich-

1) Epstein, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 18. 1916. S. 403 ff.
2) Reiche, Phys Zeitschr 19. 1918 S. 394 ff.
3) G. Thomsen, Math. Annalen 94, 1925 S. 146 ff.
4) Lütgemeier, Z. f Phys. 38, 1926 S. 251.
5) Witmer, Proceed of the Nat. Acad. of Sciences, vol 12 No 10, 1926.

net und die Komponenten der Drehgeschwindigkeit im körperfesten System ($\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$) mit p, q, r, so besteht für die Energie die bekannte Beziehung:

(1) $$2E = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Der Gesamtimpuls J sei in die raumfeste z-Achse gelegt. Sind $p_\psi$ und $p_\varphi$ die zu den Koordinaten $\psi$ und $\varphi$ konjugierten Impulse, so ergibt sich für die Quantenbedingungen nach Epstein

(2) $$\int_0^{2\pi} p_\psi \, d_\psi = 2\pi p_\psi = n_1 . h = I_1 \ \cdot \ p_\psi = J$$

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int \cos\vartheta \, d\varphi = \frac{n^2}{n_1};\ \cos\vartheta = \sqrt{\frac{f^2 - \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)}{\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)}},$$

wobei

(4) $$f^2 = \frac{2E}{p^2_\psi}.$$

Die Integrale sind über den ganzen Wertbereich der Koordinaten $\psi$ und $\varphi$ zu erstrecken.

Für $\psi$ sind die Grenzen 0 und $2\pi$. Die Grenzen von $\varphi$ ergeben sich aus einer Untersuchung der Bewegung des Kreisels.

Mittels einer von Kramers und Pauli[1] benutzten Methode kann man sich von der Bewegung ein anschauliches Bild machen. Sind P, Q, R die Komponenten des Gesamtimpulses J in Richtung $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so gilt:

(5) $$P^2 + Q^2 + R^2 = J^2 \text{ und nach (1)}$$

(6) $$2E = \frac{P^2}{A} + \frac{Q^2}{B} + \frac{R^2}{C}$$

(7) Es sei fortan: $$A > B > C$$

Die Bewegung geht so vor sich, daß das Ellipsoid (6), dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Kreisels zusammenfällt und dessen Achsen in die Richtungen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ fallen, sich derart bewegt, daß der Endpunkt des raumfesten Gesamtimpulses auf dem Ellipsoid die Schnittkurve von (5) und (6)

1) Kramers und W. Pauli jr. Z. f. Phys. 13. 1923 S. 351.

beschreibt Es soll jetzt umgekehrt das mit dem Kreisel starr verbundene Ellipsoid festgehalten werden und der Endpunkt von J sich bewegen. Es beschreibt J auf der Kugel (5) die Kurve, in der das Ellipsoid (6) die Kugel schneidet. Die Lage von J ist bestimmt durch $\vartheta$ und $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Um die Abhängigkeit der Schnittkurven von E zu erkennen, sei der Absolutwert von J festgehalten, und E wachse von null an d. h. man betrachtet die Abhängigkeit der Größe E von $n_2$. Zunächst liegt das Ellipsoid ganz innerhalb der Kugel, dann berührt es die Kugel auf den Endpunkten der großen Achse in der $\bar{x}$-Achse von innen. Bei weiter wachsendem E bilden sich 2 Kurven aus um die $\bar{x}$-Achse. Offenbar beschreibt jetzt die Koordinate $\varphi'$ und damit $\varphi$ eine Libration. Die beiden Kurven ziehen sich nach dem Durchstoßpunkte der mittleren Ellipsoidachse auf der $\bar{y}$-Achse und haben bei einem bestimmten E-Wert auf der positiven und negativen $\bar{y}$-Achse je einen Punkt gemeinsam. In diesem Augenblick sind die Librationsgrenzen von $\varphi' : -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ d. h. man erhält eine Rotation von $\varphi$. Es sind bei weiter wachsendem E zwei Kurven um die $\bar{z}$-Achse vorhanden, die schließlich in den Endpunkt der kleinsten Achse des Energieellipsoides zusammenschrumpfen. Jetzt ist eine Rotation um die kleinste Achse des Energieellipsoides vorhanden.

Die Grenzen des Integrals (3) sind demnach Librationsgrenzen oder 0 und $2\pi$, je nach dem $\frac{J^2}{A} \leqq 2E \leqq \frac{J^2}{B}$ oder $\frac{J^2}{B} \leqq 2E \leqq \frac{J^2}{C}$; denn bei $J^2 = 2EB$ stößt die Achse des mittleren Trägheitsmomentes durch die Kugel und die Libration geht in eine Rotation über.

## § 2.

Der Zusammenhang von Energie und Quantenzahlen ist gegeben durch (3). Es sei gesetzt $\frac{1}{C} = i^2; \frac{1}{B} = k^2; \frac{1}{A} = l^2$ und

$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ eingeführt. Dann wird (3)

$$(8)\quad \frac{1}{2\pi}\int \sqrt{\frac{f^2 - (l^2\cos^2\varphi' + k^2\sin^2\varphi')}{i^2 - (l^2\cos^2\varphi' + k^2\sin^2\varphi')}}\, d\varphi' = \frac{n_2}{n_1};$$

$$E = \frac{n_1^2 h^2}{8\pi^2} f^2.$$

Zur weiteren Untersuchung sei das Intervall der Energiewerte in zwei Abschnitte geteilt

$$1.\ \frac{J^2}{B} \leqq 2E \leqq \frac{J^2}{C};\quad i \geqq f \geqq k \geqq l$$

Es ist dies das Intervall der größeren Energiewerte · $\varphi'$ vollführt eine Rotation. Die Reduktion von (8) auf elliptische Integrale liefert nach Thomsen

$$(9)\quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{\pi}\Big\{F\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right)\cdot E(\beta, \varkappa') + E\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right)\cdot F(\beta, \varkappa') - F\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right)\cdot F(\beta, \varkappa')\Big\},\ \text{wobei}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \varkappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}};\ E\left(\frac{\pi}{2}\varkappa\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}\, d\psi$$

$$F(\beta, \varkappa') = \int_0^{\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\psi}};\ E(\beta, \varkappa') = \int_0^{\beta} \sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\psi}\, d\psi$$

$$\text{mit } \varkappa^2 = 1 - \varkappa'^2$$

Es bedeutet

$$(10)\quad \varkappa^2 = \frac{(i^2 - f^2)(k^2 - l^2)}{(i^2 - k^2)(f^2 - l^2)} = \operatorname{tg}^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right]\cdot\cot^2\beta$$

$$(11)\quad \sin^2\left[\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right] = \frac{k^2 - l^2}{i^2 - l^2}$$

$$(12)\quad \tau = \sin^2\beta = \frac{f^2 - l^2}{i^2 - l^2}$$

(Es ist zu beachten, daß bei Annahme (7) der Thomsen'sche Fall III vorliegt).

$$2.\ \frac{J^2}{A} \leqq 2E \leqq \frac{J^2}{B};\ i \geqq k \geqq f \geqq l$$

In diesem Intervall vollführt $\varphi'$ eine Libration zwischen $\pm \varphi'_1$. (8) wird demnach

$$(13)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi'_1} \sqrt{\frac{f^2 - (l^2\cos^2\varphi' + k^2\sin^2\varphi')}{i^2 - (l^2\cos^2\varphi' + k^2\sin^2\varphi')}}\, d\varphi' = \frac{n_2}{n_1}$$

Dies Integral wird umgeformt durch $u = l^2\cos^2\varphi' + k^2\sin^2\varphi'$ und weiterhin mit den bekannten Methoden auf die elliptischen Normalintegrale zurückgeführt. (Vergl. z. B. Enneper, Elliptische Funktionen 1890. S. 21. Tab. I, B, a u. S. 245). Es wird dann

$$(14)\quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{2}{\pi}\Big\{\frac{\pi}{2} - F(\tfrac{\pi}{2}, \varkappa_1)\, E(\beta_1, \varkappa_1') - E(\tfrac{\pi}{2}, \varkappa_1)\cdot F(\beta_1, \varkappa_1') + F(\tfrac{\pi}{2}, \varkappa_1)\, F(\beta_1, \varkappa_1')\Big\},\ \text{wobei}$$

$$(15)\quad \frac{f^2 - l^2}{i^2 - f^2} = \cot^2\beta_1 \text{ u. } \varkappa_1^2 = \frac{(i^2 - k^2)(f^2 - l^2)}{(i^2 - f^2)(k^2 - l^2)}$$

Tabelliert man mittels (9) und (14) $\tau = \sin^2\beta = \frac{f^2 - l^2}{i^2 - l^2}$ als Funktion von $\frac{n_2}{n_1}$ mit $\gamma$ als Scharparameter, so ergibt sich folgende Tabelle 1 und Figur 1. Tabelle und Figur ergeben den gesuchten Zusammenhang. (Tabelle siehe nächste Seite)

In Figur 1 ist die unterste Kurve eine Parabel mit der Gleichung

$$(17)\qquad \tau = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

Infolge der symmetrischen Eigenschaften der Kurven in bezug auf den Punkt (0,5; 0,5) ist die oberste Kurve eine Parabel mit der Gleichung

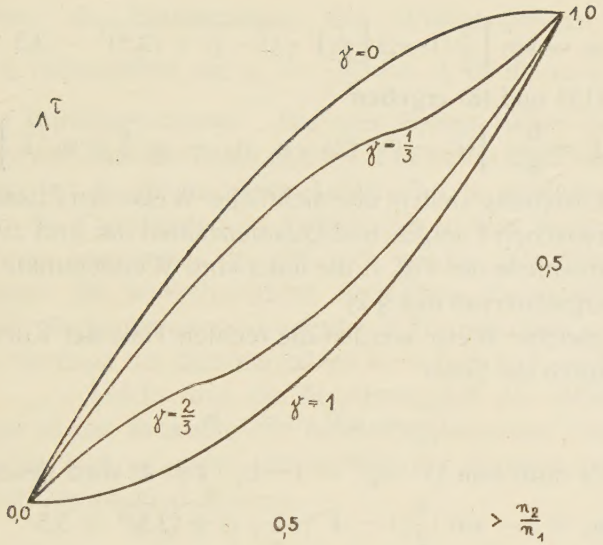
$$(18)\qquad 1 - \tau = \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

Für den Wendepunkt ist $f^2 = k^2$ · (8) läßt sich integrieren.

Die Koordinaten dieses Punktes in Figur 1 sind $\frac{n_2}{n_1} = 1 - \gamma$; $\tau = \frac{k^2 - l^2}{i^2 - l^2}$.

Tabelle 1.

| $\gamma$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $=0$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,106 | 0,163 | 0,225 | 0,293 | 0,367 | 0,452 | 0,553 | 0,684 | 1,000 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,000 |
| $=\frac{2}{9}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,104 | 0,449 | 0,561 | 0,641 | 0,740 | 0,766 | 0,778 | 0,918 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,185 | 0,654 | 0,757 | 0,816 | 0,869 | 0,880 | 0,883 | 0,948 | 1,0 |
| $=\frac{1}{3}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,049 | 0,290 | 0,562 | 0,620 | 0,650 | 0,667 | 0,761 | 0,919 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,083 | 0,425 | 0,692 | 0,730 | 0,744 | 0,750 | 0,800 | 0,923 | 1,0 |
| $=\frac{4}{9}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,098 | 0,369 | 0,506 | 0,538 | 0,556 | 0,612 | 0,731 | 0,939 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,142 | 0,455 | 0,559 | 0,579 | 0,587 | 0,617 | 0,707 | 0,924 | 1,0 |
| $=\frac{5}{9}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,061 | 0,197 | 0,334 | 0,427 | 0,444 | 0,559 | 0,716 | 0,902 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,076 | 0,225 | 0,346 | 0,406 | 0,413 | 0,488 | 0,630 | 0,858 | 1,0 |
| $=\frac{2}{3}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,081 | 0,187 | 0,318 | 0,333 | 0,380 | 0,508 | 0,710 | 0,951 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,077 | 0,164 | 0,244 | 0,250 | 0,270 | 0,362 | 0,575 | 0,917 | 1,0 |
| $=\frac{7}{9}$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,082 | 0,154 | 0,222 | 0,260 | 0,359 | 0,551 | 0,708 | 0,896 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,052 | 0,091 | 0,117 | 0,131 | 0,184 | 0,346 | 0,531 | 0,815 | 1,0 |
| $=1$ | $\frac{n_2}{n_1} =$ | 0 | 0,316 | 0,447 | 0,548 | 0,633 | 0,707 | 0,775 | 0,837 | 0,894 | 1,0 |
| | $\tau =$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 1,0 |




## § 3.

Infolge der Gestalt der Kurven Fig. 1 ist es nicht leicht möglich, für sie einen einfachen expliziten Ausdruck anzugeben, der für das ganze Energieintervall gültig ist. Wohl aber lassen sich die Kurventeile bis zum Wendepunkt mit nur kleinem prozentualem Fehler in schöner Weise durch eine einfache Funktion ersetzen. Läßt man die linke, obere Parabel mit ihrem Scheitel parallel den Achsen auf der unteren Parabel gleiten, so sieht man, daß die linken Teile der Kurven bis zum Wendepunkt bei bestimmten Lagen des Scheitels nahezu völlig mit dieser gleitenden Parabel zusammenfallen. Es läßt sich demnach die Schar der linken Kurven ersetzten durch die Schar

$$(19) \qquad (b_1 - \tau) = \left(a_1 - \frac{n_2}{n_1}\right)^2,$$

wo $a_1$ und $b_1$ die Koordinaten des Scheitelpunkts der gleitenden Parabel sind. Sie müssen (17) genügen d. h. $a_1^2 = b_1$ $a_1$ ist nur von den Trägheitsmomenten d. h. von $\gamma$ abhängig. Eine nähere Untersuchung liefert

(20) $a_1 = \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-\gamma)\right] + \sqrt{\gamma(1-\gamma) + (3{,}5)^2} - 3{,}5$

(19) (12) und (8) ergeben

(21) $E = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{(i^2 - l^2)\,[2a_1 \cdot n_1\, n_2 - n_2{}^2] + n_1{}^2\, l^2\right\}$

Diese Gleichung stellt in übersichtlicher Weise den Zusammenhang zwischen Energie- und Quantenzahlen dar und zwar für die Kurventeile der Fig. 1, die links vom Wendepunkte liegen (2. Energieintervall des § 2).

In gleicher Weise werden die rechten Teile der Kurven ersetzt durch die Schar

(22) $$(\frac{n_2}{n_1} - a_2)^2 = \tau - b_2$$

Es muß sein $(1-a_2)^2 = 1-b_2$ · Für $a_2$ wird gesetzt

(23) $a_2 = 1 - \sin(\frac{\pi}{2}\gamma) - \sqrt{\gamma(1-\gamma) + (3{,}5)^2} + 3{,}5.$

Damit wird für das 1. Energieintervall des § 2

(24) $E = \frac{h^2}{8\pi^2}\left\{(i^2 - l^2)\,[n_2^2 - 2a_2\, n_1 \cdot n_2 + 2a_2\, n_1^2] + n_1^2\, l^2\right\}$

Untersucht man den prozentualen Fehler, den man begeht, wenn man für $\tau$ die Werte setzt, die aus (19) und (22) folgen, so findet man, daß der Fehler gegen die in Tab. 1 festgelegten Werte im allgemeinen $\leqq 1\%$ ist. Nur an wenigen Stellen steigt der Fehler bis $2\%$. Die Kurve $\gamma = \frac{7}{9}$ ist in dem Teile rechts vom Wendepunkt teilweise um $10\%$ falsch. Setzt man in $a_1$ und $a_2$ statt $-3{,}5$ die Zahl $-5$, so wird der Fehler wieder $1\%$ und darunter.

---

## § 4.

Um über die Sprungmöglichkeiten der Quantenzahlen nach dem Korrespondenzprinzip eine Aussage machen zu können, sind bekanntlich die Komponenten des elektrischen

Moments als Fourierreihen der Winkelvariablen $w_i = \nu_i t + a_i$ darzustellen, wo $\nu_i = \frac{\partial E_i}{\partial I_i}$ ist. $I_i$ ist die zu $w_i$ konjugierte Wirkungsvariable. Aus den Reihen lassen sich die Sprünge der Quantenzahlen ablesen. Für das in Rede stehende Problem hat Jacobi in seiner Arbeit: Sur la rotation d' un corps[1]) die Koordinaten als Funktionen zweier linarer Zeitfunktionen angegeben. Es läßt sich zeigen, daß diese Zeitfunktionen die Winkelvariablen darstellen. Entwickelt man mit Hilfe dieser Arbeit $x + i y$ und $z$ in Fourierreihen, so folgt für die Sprünge der Quantenzahlen $\delta_1 = 0, \pm 1$; $\delta_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Macht man die Annahme, daß das elektrische Moment in der Richtung der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes liegt, so ergibt sich im Falle der Rotation von $\varphi$ — Energieintervall 1) d. § 2 —

$$(25) \qquad \left.\begin{aligned} \delta_1 &= 0, \pm 1 \\ \delta_2 &= 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{aligned}\right\}$$

Im Falle der Libration von $\varphi$ — Energieintervall 2) des § 2 — ergibt sich

$$(26) \qquad \left.\begin{aligned} \delta_1 &= \pm 1 \\ \delta_2 &= 0, \pm 2, \pm 4 \ldots \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \delta_1 &= 0 \\ \delta_2 &= \pm 1, \pm 3, \pm 5 \ldots \end{aligned}\right\}$$

Vergleicht man (25) mit (26), so ergibt sich das eigentümliche Resultat, daß zwar für das ganze Energiegebiet bei $\delta_1 = \pm 1$ $n_2$ nur um gerade Zahlen springen kann, bei $\delta_1 = 0$ in einem Teilintervall der Energie $n_2$ nur um die geraden Zahlen, im anderen Teilintervall nur um die ungeraden Zahlen springen kann. Beim Sprung von einem Intervall in das andere läßt sich also über $\delta_2$ auf Grund des Korrespondenzprinzips etwas Genaues nicht aussagen.

---

1) Crelle, Journal f. d. reine u. ungew. Math. Bd. 39, 1850.

# II. Teil

## § 1.

Es soll im Folgenden versucht werden, die Untersuchungen, die im I. Teil über den unsymmetrischen Kreisel angestellt wurden, auf das sogenannte Kramers-Pauli'sche Molekülmodell[1]) d. i. ein unsymmetrischer Kreisel mit eingebautem Schwungrad auszudehnen. Der Impuls dieses Schwungrades soll den Elektronenimpuls repräsentieren. Ist das Trägheitsmoment des Schwungrades klein gegen die Hauptträgheitsmomente des Gasamtkörpers, so gilt nach Kramers

$$(1) \quad 2E = \frac{1}{A}(P - S_1)^2 + \frac{1}{B}(Q - S_2)^2 + \frac{1}{C}(R - S_3)^2 ,$$

wo $S_1$, $S_2$, $S_3$ die Komponenten des Drehimpulses des eingebauten Schwungrades bedeuten. Die übrigen Größen sind definiert wie § 1 des I Teils. Um die Rechnungen durchführen zu können, sei gesetzt

$$S_1 = S_2 = 0; \; S_3 \neq 0$$

Es ist somit im Folgenden

$$(2) \qquad 2E = \frac{1}{A}P^2 + \frac{1}{B}Q^2 + \frac{1}{C}(R - S_3)^2$$

Es sei auch hier wieder die z-Achse die Achse des Gesamtimpulses.

Als Quantenbedingungen erhält man[2])

$$(3) \qquad \int \frac{\partial S}{\partial \psi} d\psi = p_\psi \int_0^{2\pi} d\psi = J \cdot 2\pi = n_1 \cdot h \text{ und}$$

1) a) H. A. Kramers, Z. f. Phys. 13, 1923 S. 343. b) Kramers und W. Pauli jr. ebenda S. 351.

2) Born, Vorlesungen über Atommechanik 1925 S. 130.

$$(4)\qquad \int \frac{\partial S}{\partial \varphi}\,d\varphi = \int \frac{\frac{S_3}{C}\,d\varphi}{\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)}$$

$$\pm J \int \sqrt{\frac{(2E - \frac{S_3^2}{C})\frac{1}{J^2} - \left(\frac{\sin^2\omega}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)}{\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2\varphi}{A} + \frac{\cos^2\varphi}{B}\right)} - \frac{\left(\frac{S_3}{JC}\right)^2}{\left[\frac{1}{C} - \left(\frac{\sin^2\omega}{A} + \frac{\cos^2\omega}{B}\right)\right]^2}}\,d\varphi$$

$$= n_2 \cdot h\,;\quad \frac{\partial S}{\partial \psi} = p\psi\,;\quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = p\varphi.$$

Es sei gesetzt $\frac{1}{l^2} = A$; $\frac{1}{k^2} = B$; $\frac{1}{i^2} = C$

$$(5)\qquad \frac{2E - \frac{S_3^2}{C}}{J^2} = \frac{2E - i^2 \cdot S_3^2}{J^2} = a$$

$$(6)\qquad \left(\frac{S_3}{JC}\right)^2 = \left(\frac{S_3}{J}\right)^2 \cdot i^4 = b^2$$

Auch hier sei wieder die Betrachtungsweise eingeführt, nach der das körperfeste Koordinatensystem ($\bar{x}$ $\bar{y}$ $\bar{z}$) als fest und das andere als beweglich gedacht wird (s. o. § 1 des I. Teiles) Der Anschaulichkeit wegen sei noch der Winkel $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ eingeführt. Dieser Winkel $\varphi'$ soll aber gleich wieder mit $\varphi$ bezeichnet werden Damit wird (4)

$$(7)\qquad \int \frac{i^2 S_3\,d\varphi}{i^2 - (k^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi)}$$

$$\pm J \int \sqrt{\frac{a - (k^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi)}{i^2 - (k^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi)} + \frac{b^2}{[i^2 - (k^2 \sin^2\varphi + l^2 \cos^2\varphi)]^2}}\,d\varphi$$

$$= n_2\,h$$

Setzt man $S_3 = 0$, so geht natürlich (4) über in (3) des I.Teiles. (4) läßt sich auch schreiben

$$J \int \cos \vartheta \, d\varphi = n_2 \, h \tag{8}$$

Es ist also zu setzen

$$\cos \vartheta = \frac{i^2 S_3 \cdot \frac{1}{J}}{i^2 - (k^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi)} \pm \sqrt{\frac{a - (k^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi)}{i^2 - (k^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi)} + \frac{b^2}{[i^2 - (k^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi)]^2}} \tag{9}$$

Um den Variabilitätsbereich der Koordinate $\varphi$ zu erkennen, sei nun die Bewegung des Kreiselkörpers näher untersucht.

Es wird angenommen:

$$A > B > C$$

Dies bedeutet nach oben, daß der Elektronenimpuls in der Richtung der Achse des kleinsten Hauptträgheitsmoments liegt. Stellt man bezüglich der Bewegungsverhältnisse die gleichen Betrachtungen an wie in Teil I, so sind unter der Bedingung $(J - S_3)\frac{B}{C} > J$[1], die im Falle des durchgerechneten Beispiels erfüllt ist, die Schnittkurven derart, daß zuerst in 2 Punkten des Meridians der größten Achse Berührung eintritt, um die sich zwei Kurven ausbilden, die sich nach zwei Punkten des Meridians der mittelsten Achse hinziehen und dort zusammenstoßen. Bis dahin ist eine Libration der $\varphi$-Koordinate vorhanden. Dann existieren zwei den Nordpol umschließende Kurven, die eine Zone ausschneiden. Die obere Kurve zieht sich nach dem Nordpol und verschwindet. Die

1) Diese Bedingung folgt aus Betrachtungen über die Krümmungsverhältnisse von Kugel und Ellipsoid.

zweite, die noch übrig bleibt, zieht sich nach dem Südpol und verschwindet dort. Hier liegt eine Rotation der $\varphi$-Koordinate vor.

Für das Geleit der Libration nimmt die Quantenbedingung (8) die Form an

$$(11)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1}\cos\vartheta_1\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{+\varphi_1}^{-\varphi_1}\cos\vartheta_2\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_1}^{+\varphi_1}\cos\vartheta_1\,d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi}^{+\varphi_1}\cos\vartheta_2\,d\varphi=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\varphi_1}F(\varphi)\,d\varphi=\frac{n_2}{n_1},$$

wenn $F(\varphi)$ die Wurzel in (9) abkürzend darstellt. Geht die Libration in eine Rotation über, so wird $\varphi_1=\frac{\pi}{2}$ und die Quantenbedingung ist

$$(12)\qquad \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi_1}F(\varphi)\,d\varphi=\frac{n_2}{n_1}$$

Diese Bedingung bleibt erhalten bis die obere Schnittkurve am Nordpol verschwindet. Da wird $\cos\vartheta_1=1$. Es ist sinngemäß, auch weiterhin die Bedingung (12) anzusetzen bis die zweite Schnittkurve mit $\cos\vartheta_2=-1$ am Südpol verschwindet. Dann ist keine reelle Schnittkurve mehr vorhanden.

---

## § 2.

Um die mathematisehe Behandlung des Integrals durchführen zu können, werde das Wachsen von E und damit das Wachsen von a in drei Abschnitte geteilt.

a) Der Energieabschnitt zwischen dem größten Wert von E und dem, der einen Berührpunkt am Nordpol liefert, ist bestimmt durch

$$(14)\qquad i^2\left(1-2\,\frac{S_3}{J}\right)\leqq a\leqq i^2\left(1+2\,\frac{S_3}{J}\right)$$

Die Transformation von (13) auf die Normalform liefert

$$(15)\quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{m\,n\,q\,\pi}\Big[2\,a\,n\,q - (k^2+l^2)\,n\,q + (k^2-l^2)\,q + 4\,n^2\,b^2\Big]\cdot K - \frac{k^2-l^2}{m\,n\,\pi}\Big\{\sin^2\beta_1\cdot K + \frac{\sin\beta_1\cdot\cos\beta_1}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\beta_1}}$$
$$\times\Big[\frac{\pi}{2} - K\cdot E(\beta_1,\varkappa') - E\cdot F(\beta_1,\varkappa') + K\cdot F(\beta_1,\varkappa')\Big]\Big\}$$
$$+\frac{4\,b^2\,p\,(q-n\,p)}{m\,q\,\pi\,(p^2-q^2)}\Big\{\sin^2\beta_2\quad K + \frac{\sin\beta_2\cdot\cos\beta_2}{\sqrt{1-\varkappa'^2\sin^2\beta_2}}$$
$$\times\Big[\frac{\pi}{2} - K\cdot E(\beta_2,\varkappa') - E\cdot F(\beta_2,\varkappa') + K\quad F(\beta_2,\varkappa')\Big]\Big\}$$

Hierbei ist: $\dfrac{n^2}{1-n^2} = \cot^2\beta_1$ ; $\dfrac{q^2}{p^2-q^2} = \cot^2\beta_2$

$$(16)\quad n = \frac{\sqrt{(u_2-u_3)(u_2-u_4)} - \sqrt{(u_1-u_3)(u_1-u_4)}}{\sqrt{(u_2-u_3)(u_2-u_4)} + \sqrt{(u_1-u_3)(u_1-u_4)}}$$
$$m = \sqrt[4]{(u_2-u_3)\,(u_1-u_4)\,(u_1-u_3)\,(u_2-u_4)}$$

$$(17)\quad \varkappa^2 = \frac{-(u_2-u_3)(u_1-u_4) - (u_1-u_3)(u_2-u_4)}{4\sqrt{(u_2-u_3)(u_1-u_4)(u_1-u_3)(u_2-u_4)}} + \frac{1}{2};\qquad \varkappa'^2 = 1-\varkappa^2$$

$$(18)\quad p = 2i^2 - (u_1+u_2) + n\,(u_2-u_1);$$
$$q = n\Big[2i^2 - (u_1+u_2)\Big] + u_2-u_1$$

$$(19)\quad u_1 = l^2;\ u_2 = k^2;\ u_{3,4} = \frac{1}{2}\,(a + i^2 \mp \sqrt{(a-i^2)^2 - 4\,b^2}$$

b) Nimmt die Energie ab, sodaß zwei Kurven um die $\bar{z}$-Achse vorhanden sind, bis zu dem Wert, bei dem sich die Kurven auf dem Meridian der mittleren Achse berühren, so besteht

(20) $$k^2 - \frac{\left(\frac{S_3}{J}\right)^2 i^4}{i^2 - k^2} \leqq a \leqq i^2 \left(1 - 2\,\frac{S_3}{J}\right)$$

In diesem Intervall liefert eine analoge Transformation wie unter a)

(21) $$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{m\,n\,q\,\pi}\left[2\,a\,n\,q - (k^2 + l^2)\,n\,q + (k^2 - l^2)\,q + 4\,n^2\,b^2\right] K - \frac{k^2 - l^2}{m\,\pi}\left\{\frac{1 - n^2}{n} K - \operatorname{tg}\,\gamma_1 \times \left(\frac{\pi}{2} - K\cdot E\,(\gamma_1, \varkappa') - E\cdot F\,(\gamma_1, \varkappa') + K\cdot F\,(\gamma_1, \varkappa')\right)\right\} + \frac{4\,b^2\,(q - n\,p)}{m\,q\,p\,\pi}\left\{K + \frac{\sqrt{1 - \varkappa'^2 \sin^2\gamma_2}}{\varkappa'^2 \sin\gamma_2 \cdot \cos\gamma_2} \times \left[\frac{\pi}{2} - K\cdot E\,(\gamma_2, \varkappa') - E\cdot F\,(\gamma_2, \varkappa') + K\cdot F\,(\gamma_2, \varkappa')\right]\right\}$$

Die Größen sind definiert wie (16) — (19); nur ist jetzt

(22) $$\varkappa = \frac{\sqrt{(u_3 - u_1)\,(u_4 - u_2)} - \sqrt{(u_3 - u_2)\,(u_4 - u_1)}}{\sqrt{(u_3 - u_1)\,(u_4 - u_2)} + \sqrt{(u_3 - u_2)\,(u_4 - u_1)}}$$

(23) $$m = \frac{1}{2}\left|\sqrt{(u_3 - u_1)\,(u_4 - u_2)} + \sqrt{(u_3 - u_2)\,(u_4 - u_1)}\right|$$

$$-n^2 = -1 + \varkappa'^2 \sin^2\gamma_1\,; \quad -\frac{q^2}{p^2} = -1 + \varkappa'^2 \sin^2\gamma_2$$

c) Es nehme die Energie weiter ab bis das Ellipsoid die Kugel von innen berührt. Dann gilt

(24) $$l^2 - \left(\frac{S_3}{J}\right)^2 \frac{i^4}{i^2 - l^2} \leqq a \leqq k^2 - \left(\frac{S_3}{J}\right)^2 \frac{i^4}{i^2 - k^2}$$

Die Transformation für die Gebiete, in dem $\varphi$ libriert, ergibt eine Gleichung der Form (21). Die Größen sind definiert durch (16) 1. Gleichung, (18), (22), (23), wo in diesem Falle zu setzen ist:

(25) $$u_1 = l^2\,; \quad u^2 = \frac{1}{2}\left(a + i^2 - \sqrt{(a - i^2)^2 - 4\,b^2}\right);$$

$$u_3 = k^2\,; \quad u_4 = \frac{1}{2}\left(a + i^2 + \sqrt{(a - i^2)^2 - 4\,b^2}\right)$$

Für die Grenzen der Intervalle (14), (20), (24) läßt sich (13) integrieren und man erhält, wenn die a-Werte beim größten anfangend eingesetzt werden und noch eingeführt wird

$$g(a) = \frac{a - l^2}{i^2 - l^2} \tag{26}$$

$$\begin{cases} g(a) = 1 + 2\,\dfrac{S^3}{J}\,\dfrac{i^2}{i^2 - l^2} = \beta \\ \dfrac{n^2}{n^1} = 1 + \dfrac{S_3}{J}\,\dfrac{i^2}{\sqrt{(i^2 - k^2)\,(i^2 - l^2)}} = \alpha \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} g(a) = 1 - 2\,\dfrac{S_3}{J}\,\dfrac{i^2}{i^2 - l^2} = \beta_1 \\ \dfrac{n_2}{n_1} = 1 - \dfrac{S_3}{J}\,\dfrac{i^2}{\sqrt{(i^2 - k^2)\,(i^2 - l^2)}} = \alpha_1 \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} g(a) = \dfrac{k^2 - l^2}{i^2 - l^2} - \left(\dfrac{S_3}{J}\right)^2 \dfrac{i^4}{(i^2 - k^2)(i^2 - l^2)} = \dfrac{k^2 - l^2}{i^2 - l^2} - b_1^2 = \beta_2 \\ \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{2}{\pi}\left\{\arcsin \dfrac{\sqrt{\dfrac{k^2 - l^2}{i^2 - l^2}}}{\sqrt{1 - b_1^2}} - b_1 \arcsin \sqrt{\dfrac{b_1^2\,\dfrac{k^2 - l^2}{i^2 - k^2}}{1 - b_1^2}}\right\} = \alpha_2 \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} g(a) = -\dfrac{b^2}{(i^2 - l^2)^2} = \beta_3 \\ \dfrac{n_2}{n_1} = 0 = \alpha_3 \end{cases} \tag{30}$$

## § 3.

Um eine einfache angenäherte Beziehung zwischen a und den Quantenzahlen zu erhalten, müssen die Kurven bekannt sein, die durch (15) und (21) dargestellt sind. Eine Tabellierung ist nur dann möglich, wenn von den sieben auftretenden Konstanden ($i^2$, $k^2$, $l^2$, $S_3$, $\frac{n^2}{n_1}$, $n_1$ a) mindestens vier willkürlich an-

genommen werden. Es seien dies die Größen $S_3 = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$; $i^2 = 1{,}0309 \cdot 10^{40}$, $h^2 = 0{,}44445 \cdot 10^{40}$, $l^2 = 0{,}30488 \cdot 10^{40}$. Diese Werte der Hauptträgheitsachsen folgen aus den Werten der Trägheitsmomente, die von Witt für das Wassermolekül[1] angegeben sind. Es sei analog § 2, I. Teil $\frac{a-l^2}{i^2-l^2} = g(a)$ tabelliert als Funktion von $\frac{n_2}{n_1}$; die letzte Konstante $n_1$ sei der Parameter der einfach unendlichen Kurvenschar. In Tabelle I sind im Auszug die Werte von $\frac{n^2}{n^1}$ angegeben für die einzelnen Werte von g (a) und $n_1$. Diese Tabelle enthält die Kurvenpunkte des Rotationsgebietes. In Tabelle II sind die Werte von g (a), $\frac{n_2}{n_1}$ und $n_1$ für das Librationsgebiet angegeben.

**Tabelle I.**

| | 1 | 2 | 3 | ∞ |
|---|---|---|---|---|
| 2,420 | 1,790 | | | |
| 1,432 | | 1,281 | 1,245 | |
| 1,234 | | 1,192 | 1,153 | |
| 1,150 | | 1,153 | 1,112 | |
| 1,000 | 1,127 | 1,078 | 1,035 | 1,000 |
| 0,888 | | 1,020 | 0,976 | 0,940 |
| 0,670 | | 0,888 | 0,838 | 0,796 |
| 0,488 | | 0,764 | 0,706 | 0,655 |
| 0,365 | | 0,665 | 0,594 | 0,532 |
| 0,289 | | | 0,524 | 0,452 |
| 0,241 | | | 0,467 | 0,385 |
| 0,192 | 0,853 | 0,506 | 0,407 | 0,290 |
| 0,062 | | 0,326 | | |

1) H. Witt, Z. f. Phys. 28, 1924 S. 236. Besonders auch den Bericht über diese Arbeit in den Phys. Berichten 1924 S. 1782, woher die oben benutzten Trägheitsmomente entnommen sind.

## Tabelle II.

| | $n_1 = 2$ | $n_1 = 3$ | $n_1 = \infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(a) =$ | $-0{,}010$ | $0{,}095$ | $0{,}147$ |
| $\frac{n_2}{n_1} =$ | $0{,}165$ | $0{,}215$ | $0{,}243$ |
| $g(a) =$ | $-0{,}050$ | $0{,}031$ | $0{,}090$ |
| $\frac{n_2}{n_1} =$ | $0{,}100$ | $0{,}120$ | $0{,}119$ |
| $g(a) =$ | | | $0{,}027$ |
| $\frac{n_2}{n_1} =$ | | | $0{,}032$ |
| $g(a) =$ | $-0{,}126$ | $-0{,}056$ | $0{,}000$ |
| $\frac{n_2}{n_1} =$ | $0{,}000$ | $0{,}000$ | $0{,}000$ |

## § 4.

Wie im I. Teile seien die Kurven näherungsweise wiedergegeben durch einen expliziten Ansdruck. Von dem Librationsteil sind bekannt die beiden Punke (29), (30). Außerdem überzeugt man sich leicht, daß (27) — und ebenso 28 — auf der Geraden liegen

$$(31) \qquad \frac{\frac{n_2}{n_1} - 1}{g(a) - 1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i^2 - l^2}{i^2 - k^2}}$$

Es sei der Kurventeil der Libration ersetzt durch eine Parabel, deren Scheitel auf (31) liegt, die durch (29), (30) geht. Sie hat die Form $(x - c_1)^2 = -2p(y - c_2)$. Gemäß den 3 Annahmen ist:

$$(32) \quad 2p = \frac{\alpha_2 (2c_1 - \alpha_2)}{\beta_2 - \beta_3}; \; c_2 = 1 + (c_1 - 1) \frac{1 - \beta_1}{1 - \alpha_1}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2} \frac{(\beta_3 - 1) 2\alpha_2 + (\alpha_2^2 + 2\alpha) \frac{1 - \beta_1}{1 - \alpha_1}}{\beta_2 - \beta_3 - 2\alpha_2 \frac{1 - \beta_1}{1 - \alpha_1}}$$

$$+\sqrt{\frac{a_2^2\left(\beta_3-1+\frac{1-\beta_1}{1-\alpha_1}\right)}{\beta_2-\beta_3-2\alpha_2\frac{1-\beta_1}{1-\alpha_1}}+\frac{1}{4}\left(\frac{(\beta_3-1)\,2\alpha_2+(\alpha_2^2+2\alpha_2)\frac{1-\beta_1}{1-\alpha_1}}{\beta_2-\beta_3-2\alpha_2\frac{1-\beta_1}{1-\alpha_1}}\right)^2}$$

Löst man die Gleichung in Bezug auf E auf – nach (5) –, so wird

$$(33)\quad E=\frac{h^2}{16\,p\,\pi^2}\Big|n_1^2\left[(2\,p\,c_2-c_1^2)\,(i^2-l^2)+2\,p\,l^2\right]+2\,n_1\cdot n_2\cdot c_1\,(i^2-l^2)-n2^2\,(i^2-l^2)\Big|+\frac{1}{2}\,i^2\cdot S_3^2$$

Dies ist die Energie als Funktion der Quantenzahlen für das Librationsgebiet. Zu beachten ist, daß nach (32) und (27)–(30) Die Größen p, $c_1$, $c_2$ noch Funktionen von $n_1$ sind.

Den rechten Teil der Kurven kann man ersetzen durch die nach oben geöffneten Parabeln, die durch die drei Punkte (27), (28), (29) gehen. Sie haben die Form $(x-\bar{c}_1)^2=2\bar{p}\times(y-\bar{c}_2)$. Hierbei ist

$$(34)\quad \bar{c}_1=\frac{1}{2}\,\frac{(\alpha_1^2-\alpha_3^2)\,(\beta-\beta_2)-(\alpha^2-\alpha_3^2)\,(\beta_1-\beta_2)}{(\alpha_2-\alpha)\,(\beta_1-\beta_2)-(\alpha_2-\alpha_1)\,(\beta-\beta_2)}$$

$$\bar{p}=\frac{\alpha^2-\alpha_2^2}{\beta-\beta_2}+\frac{\alpha^2-\alpha}{\beta-\beta_2}\,\bar{c}_1$$

$$\bar{c}_2=\beta-\frac{(\alpha-\bar{c}_1)^2}{2\bar{p}}$$

Damit erhält man

$$(35)\quad E=\frac{h^2}{16\,\bar{p}\,\pi^2}\Big|n_1^2\left[(\bar{c}_1^2+2\,\bar{p}\,\bar{c}_2)\,(i^2-l^2)+2\,\bar{p}\,l^2\right]-2\,n_1\quad n_2\quad\bar{c}_1\,(i^2-l^2)+n2^2\,(i^2-l^2)\Big|+\frac{1}{2}i^2\,S_3{}^2$$

Dies ist die Energie als Funktion der Quantenzahlen für das Rotationsgebiet; auch hier hängen die Größen $\overline{p}$, $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$ von $n_1$ ab. Eine genauere Untersuchung gibt einen Vergleich zwischen den mit den Näherungsgleichungen errechneten Werten von $\frac{n^2}{n_1}$, $n_1$ und g (a) mit den durch die Tabellen gegebenen genauen Werten. Der Fehler hält sich in den gleichen Grenzen wie bei dem im I. Teil behandelten Problem.

Man wird natürlich versuchen müssen, sich von den beschränkenden Annahmen nach Möglichkeit frei zu machen. Vor allem wird man fragen, wie ändern sich die Kurven bei Wahl anderer Trägheitsmomente und eines anderen Wertes von $S_3$, und sind die Ersatzkurven auch dann noch brauchbar. Einige Ueberlegungen zeigen, daß durch Aenderung von $S_3$ der Charakter der Ersatz-Kurven sich nicht ändert. Weiter kann behauptet werden: (33) und (35) stellen die Energie dar als Funktion der Quantenzahlen, und zwar ist dies die Energie eines Kramers-Pauli-Modells mit beliebigen Trägheitsmomenten, die die Annahme $(J-S_3)\frac{B}{C} > J$ (s. § 1) erfüllen. Das in den unsymmetrischen Kreisel eingebaute Schwungrad hat den beliebig großen Impuls $S_3$, der in der Richtung der Achse des kleinsten Trägheitsmomentes liegt. Wird die im I. Teil definierte Größe $\gamma < \frac{5}{9}$ so wird für das Librationsgebiet die Formel unsicher.

Die vorliegende Arbeit wurde von Herrn Professor Reiche angeregt, dem für sein jederzeit gütiges Interesse an ihrem Fortgang auch hier von Herzen gedankt sei.

## Lebenslauf.

Ich, Eberhard Ließ, bin geboren am 17. 2. 1902 in Klein-Kniegnitz, Kreis Nimptsch als Sohn des Pfarrers Karl Ließ. Nachdem ich Ostern 1920 die Reifeprüfung am Gymnasium zu Strehlen i. Schl. bestanden hatte, studierte ich von Herbst 1920 bis Ostern 1922 in Würzburg und von Ostern 1922 an in Breslau Mathematik und Physik. Am 13. November 1926 bestand ich die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen.